COLEGIO DE BACHILLERES

ESTADISTICA DESCRIPTIVA E INFERENCIAL I

FASCÍCULO 4. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Autores: Alejandro Rosas Snell

COLEGIO DE
BACHILLERES

Colaboradores:

Asesoría Pedagógica

Revisión de Contenido

Diseño Editorial
Leonel Bello Cuevas
Javier Darío Cruz Ortiz

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 5
PROPÓSITO 7
CUESTIONAMIENTO GUÍA 9

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD 11

1.1 FRECUENCIA RELATIVA 12

1.1.1 Experimentos 12

1.1.2 Espacio Muestral 13

1.1.3 Eventos 14

1.1.4 Propiedades de la Frecuencia Relativa 16

1.2. NOCIONES DE PROBABILIDAD 18

1.2.1 Concepto de Probabilidad y su Expresión Algebraica 18

1.2.2 Probabilidad de Eventos Excluyentes y No Mutuamente Excluyentes 25

a) Eventos Mutuamente Excluyentes 25
b) Eventos No Mutuamente Excluyentes 27

1.2.3 Probabilidad Condicional e Independiente 31

1.2.4 Eventos Independientes 36

1.3 CÁLCULO DE PROBABILIDADES: PROCEDIMIENTOS ELEMENTALES DE CONTEO 37

1.3.1 Arreglos con Repetición y sin Repetición 37

a) Permutaciones o Arreglos con Repetición 37
b) Permutaciones o Arreglos sin Repetición 40
c) Combinaciones 43

RECAPITULACIÓN 47

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN 48

AUTOEVALUACIÓN 50

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN 53

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA 54

INTRODUCCIÓN

Si volteamos a nuestro alrededor nos daremos cuenta que nuestra vida está llena de afirmaciones que llevan implícito el concepto de probabilidad, como por ejemplo: los pronósticos meteorológicos nos indican las probabilidades de lluvia; los médicos nos dicen qué probabilidades hay de que nuestras enfermedades se curen por medio de determinados tratamientos terapéuticos; los profesores, en la escuela, especulan sobre nuestras posibilidades de éxito en el bachillerato; el Sr. Cruz, la posibilidad de obtener el primer premio de la lotería, etc.

Para lograr y facilitar la comprensión del contenido de este fascículo, iniciaremos con un bosquejo histórico de la probabilidad señalando las causas y motivos que promovieron su creación. Definiremos lo que es un Experimento, lo que es un Evento; conocerás el concepto de espacio muestral y las propiedades de la frecuencia relativa; ésta última servirá como base para definir la probabilidad de ocurrencia de un evento. Todo lo anterior nos permitirá abordar el cálculo de excluyentes, así como la probabilidad condicional para llegar a la probabilidad de eventos independientes. Además, veremos que cuando se calculan probabilidades, se debe determinar el número de veces que ocurre un evento de interés. Después, estudiaremos las técnicas de conteo para conocer las probabilidades de ocurrencia en diversos problemas.

Todo lo anterior es parte de los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad (la cual es una de las ramas de las Matemáticas que se ocupa de los fenómenos que se producen al azar a fenómenos aleatorios) y base para iniciar el estudio a la introducción de la Estadística Inferencial; por tales razones, al finalizar el estudio de este fascículo podrás calcular probabilidades, obtener el número total de resultados posibles de una muestra o experimento.

Todo lo anterior te servirá para estudiar en la siguiente materia EDIN 2 distribuciones probabilísticas.

PROPÓSITO

Hasta el momento has aprendido las formas más importantes de organización, análisis y medición de datos así como la relación y tipos entre dos variables. Ahora aprenderás que la probabilidad forma parte de nuestra vida diaria. En numerosas ocasiones, en la forma de decisiones de carácter personal y gerencial, enfrentamos la incertidumbre y nos valemos de la teoría de la probabilidad, sin importar si admitimos o no el empleo de una cosa tan refinada. Por ejemplo, cuando oímos un pronóstico del tiempo según el cual hay 70% de probabilidades de lluvia, cambiamos nuestros planes; o cuando los gerentes trabajan con inventarios de ropa de alta moda femenina deben preguntarse que probabilidades existen de que las ventas alcancen o rebasen cierto nivel; o al preguntarte; ¿cuáles son las probabilidades de que el profesor me pida recordar algo referente a la historia de la teoría de la probabilidad?. Como te habrás dado cuenta, vivimos en un mundo donde somos incapaces de pronosticar el futuro con absoluta certeza. La necesidad de sortear la incertidumbre nos lleva a estudiar y aplicar la teoría de la probabilidad.

En este fascículo aprenderás, usando “Elementos de Probabilidad”, a determinar el espacio muestral o espacio de eventos asociados a un experimento, conocerás las propiedades de la frecuencia relativa, calcularás probabilidades de eventos, probabilidades de eventos excluyentes y no mutuamente excluyentes.

También resolverás problemas donde apliques la probabilidad condicional y eventos independientes. Finalmente realizarás cálculos para conocer el total de resultados posibles utilizando las técnicas de conteo (arreglos o permutaciones con o sin repetición, combinaciones y coeficiente del binomio).

Todo lo anterior te permitirá familiarizarte con algunos conceptos de probabilidad necesarios para iniciar el curso de introducción a la Estadística Inferencial.

CUESTIONAMIENTO GUÍA

La siguiente tabla muestra el resultado de 500 entrevistas hechas durante una encuesta cuyo objetivo era analizar las opiniones de los residentes de cierta ciudad acerca de los OVNIS. Los datos se clasificaron según el sector de la ciudad donde se aplicó el cuestionario:

Tabla: Resultados de la Entrevista

Sector de la Ciudad	Contestó (C)	No estaba en casa (N)	Rehusó contestar (R)	Total
A	100	20	5	125
B	115	5	5	125
C	50	60	15	125
D	35	50	40	125
Total	300	135	65	500

a) Si se selecciona un cuestionario al azar entre los 500, ¿Cuál es la probabilidad de que:

1) Esté contestado?
2) La persona a quien va dirigida la encuesta no haya estado en casa?
3) El entrevistado viva en el sector A, B, C y D?
4) El entrevistado conteste el cuestionario, dado que aquel viva en el sector B?
5) La persona encuestada rehuse contestar el cuestionario o viva en el sector D?

b) Calcula las siguientes probabilidades:

1) P (A ´ R)
2) P (B U C)
3) P (D’)
4) P (N/D)
5) P (B/R)

Este problema tiene por objetivo despertar tu curiosidad por aprender los “Elementos de Probabilidad”, ya que son base para iniciar el estudio de las distribuciones probabilísticas y como consecuencia, adquieras las nociones necesarias de la Estadística Inferencial o Inferencia Estadística.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Los jugadores a lo largo de la historia siempre han recurrido a las probabilidades para realizar sus apuestas. Aproximadamente por el año 3500 A.C., juegos de azar practicados con objetos de hueso, que podrían ser consideradas como los precursores de los dados, fueron ampliamente desarrollados en Egipto y otros lugares. Dados cúbicos con marcas virtualmente idénticas a los dados modernos se han encontrado en tumbas egipcias que datan del año 2000 A.C. Sabemos que el juego con dados ha sido popular desde esa época y que fue parte importante en el primer desarrollo de la Teoría de la Probabilidad.

Se considera que por el siglo XVII de nuestra era un noble francés, llamado Antonie Gombaulod (1607-1684) puso en tela de juicio el fundamento matemático del éxito y del fracaso en las mesas de juego. Gombaulod formuló esta pregunta al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662): ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos seises por lo menos una vez en veinticuatro lanzamientos de un par de dados? Pascal resolvió el problema, pues la Teoría de la Probabilidad empezaba a interesarle tanto como a Gombauld.

Ambos compartieron sus ideas con el famoso matemático Pierre de Fermat (1601-1665). Las cartas escritas por los tres constituyen la primera revista académica dedicada a la Teoría de la Probabilidad. Sin embargo, probabilidades numéricas para ciertas combinaciones de dados ya habían sido calculadas por Girolamo Cardano (1501-1576) y por Galileo Galilei (1564-1642).

La Teoría de la Probabilidad toma importancia cuando Jacob Bernoulli (1645-1705), Abraham de Moiure (1667-1754), el reverendo Thomas Bayes (1702-1761)y Joseph Lagrage (1736-1813) inventaron fórmulas y técnicas probabilísticas. En el siglo XIX Pierre Simón, Marquis de Laplace (1749-1827), unificó esas ideas y formuló la primera teoría general de la probabilidad.

La Teoría de la Probabilidad se ha desarrollado constantemente desde el siglo XVII y se ha aplicado ampliamente en diversos campos de estudio. Hoy, la Teoría de la Probabilidad es una herramienta importante en la mayoría de las áreas de ingeniería, ciencia y administración.

Como te das cuenta, la Teoría de la Probabilidad tiene muchas aplicaciones formales. El concepto de Probabilidad aparece también en nuestras vidas y en las conversaciones cotidianas. Por ejemplo, a menudo oímos y usamos expresiones tales como: “probablemente lloverá mañana por la tarde”; “es muy probable que el avión llegue tarde”. Cada una de estas expresiones y otras más están basadas en el concepto de probabilidad.

A pesar de que el concepto de probabilidad es tan común y natural a nuestra experiencia cotidiana, no existe una única interpretación científica de término probabilidad aceptada por todos los estadísticos y autoridades científicas. De hecho, el verdadero significado de la probabilidad es todavía un tema muy conflictivo por lo que más adelante en este fascículo descubriremos algunas interpretaciones diferentes de la probabilidad.

Las situaciones que dieron origen al uso del término Probabilidad (problemas relacionados con la probabilidad) aparece alrededor del año de 1650, cuando sugerido por los juegos de dados, de cartas, del lanzamiento de una moneda se planteó la cuestión de determinar la probabilidad de ganar una partida. De esta manera surgieron los fundamentos del cálculo de probabilidad; Fermat y Pascal, esquematizando las cuestiones propuestas, dieron en 1654 la primera definición de probabilidad.

1.1 FRECUENCIA RELATIVA

1.1.1 Experimentos

La Teoría de la Probabilidad tiene que ver con los diversos resultados posibles que pueden obtenerse y los posibles sucesos que podrían ocurrir cuando se realiza un experimento. El término experimento se utiliza en la teoría de la probabilidad para describir virtualmente cualquier proceso cuyos resultados no se conocen de antemano con certeza. Entonces, un experimento es el proceso mediante el cual se obtiene una observación (o una medición) de un fenómeno.

Si se realiza un experimento, éste puede tener uno de varios posibles resultados; si no puede predecirse con seguridad cual ocurrirá, se dice que el experimento es <u>aleatorio</u>. Si un experimento tiene un único resultado posible, que al realizarlo sabemos que ocurrirá, el experimento se llamará <u>determinístico</u>.

Por ejemplo; un experimento aleatorio es el siguiente:

Si lanzas una moneda, cuyo resultado puede ser, caer águila o caer sol. En este experimento no podemos predecir con seguridad cuál resultado aparecerá con certeza. Otro experimento aleatorio es el siguiente: al lanzar un dado, los resultados que se obtienen pueden ser cualquier número del 1 al 6. Un experimento determinístico sería por ejemplo, extraer una bola de una que contiene bolas con un sólo color, digamos negras. Si nos fijamos en el color de la bola extraída sabemos de antemano que es negra.

Para reafirmar lo anterior, de los siguientes ejemplos señala cuales son experimentos aleatorios y cuales determinísticos, si tienes alguna duda, acude con tu profesor o asesor para que lo aclares.

Enunciados:

1) Es un experimento en el cual una moneda se lanza 10 veces, el experimentador está interesado en determinar la probabilidad de obtener al menos cuatro caras (soles).

2) En un experimento para el cual se va a seleccionar una muestra de 1000 transistores de un cargamento de artículos similares y en el que se va inspeccionar cada artículo seleccionado, una persona está interesada en determinar la probabilidad de que no más de uno de los transistores seleccionados sea defectuoso.

3) A partir de información relacionada con la vida de Thomas Jefferson, alguien desea establecer la probabilidad de que Jefferson haya nacido en el año de 1741.

1.1.2 Espacio Muestral

La colección de todos los posibles resultados de un experimento se llama "Espacio muestral" del experimento. El espacio muestral de un experimento puede considerarse como un conjunto de diferentes resultados posibles, en el que cada resultado puede ser un punto, un elemento o un evento del espacio muestral. Por ejemplo, al realizar el experimento de lanzar un dado y observar la cara que aparece, vemos una serie de resultados posibles: uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis; por lo que el espacio muestral es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Otro ejemplo es, si realizamos el experimento; si lanzamos dos monedas al aire, observamos que los posibles resultados pueden ser: aparecen dos soles; aparece un sol una águila, aparece una águila y un sol o aparecen dos águilas; por lo que el espacio muestral es:

T = { (sol, sol) (sol, águila) (águila, sol) (águila, águila) }

Otro ejemplo es, si realizamos el experimento; se lanzan dos dados, los posibles resultados al observar el número de puntos en ambas caras de los dados es el siguiente espacio muestral:

$$V = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6) \end{array} \right\}$$

Recuerda que el conjunto de los posibles resultados de un experimento se le llama "Espacio Muestral", o "Espacio de Eventos".

1.1.3 Eventos

Con base a los experimentos anteriores (lanzar un dado, lanzar dos monedas y lanzar dos dados), observamos que éstos pueden tener uno o más resultados, a los cuales se les llama "Eventos" y que se representan mediante letras mayúsculas. Por ejemplo, si un experimento consiste en registrar el número de los nuevos pedidos que recibe un fabricante, algunos eventos son los siguientes:

A: no llegan pedidos nuevos.

B: el número de pedidos nuevos es mayor que 50.

C: el número de pedidos nuevos es de 25.

D: el número de pedidos nuevos es menor que 15.

Podríamos hacer una lista de muchos eventos asociados con el experimento, algunos con más posibilidad de ocurrir que otros. Desde el punto de vista de conjuntos, un evento es un subconjunto de un espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento de tirar un dado se tiene:

{1}	es un evento elemental o evento simple
{2,4}	es un evento
{1,2,3}	es un evento
{1, 2, 3, 4, 5, 6}	es un evento

Los subconjuntos constituidos por un único elemento se llaman eventos simples o eventos elementales. El evento constituido por todos los eventos simples o elementales del espacio muestral se llama evento seguro. En el ejemplo de la tirada del dado el evento seguro S es el evento S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y es un evento seguro porque siempre ocurre. El evento que nunca ocurre [Ø] se llama evento imposible. Por ejemplo, se lanza un dado, el evento de que caiga un siete, es imposible.

Los conceptos de espacio muestral y evento que tú ya conoces, están relacionados con el concepto de Frecuencia relativa. La frecuencia relativa con la que puede esperarse que ocurra un evento es, la posibilidad del evento. Es decir, la probabilidad de un evento A es una medida de la creencia en que el experimento resultará de un evento A. Para darle sentido a este concepto, concluimos que se generan poblaciones de observaciones al repetir un experimento de un gran número de veces.

Si el evento A se observa f veces en este gran número N de repeticiones del experimento, entonces se considera que la probabilidad del evento A es:

$$P(A) = \frac{f}{N}$$

Esta interpretación práctica del significado de la probabilidad se llama “Concepto de Frecuencia Relativa de la Probabilidad”.

A continuación discutiremos las propiedades de frecuencia relativa que están relacionadas con los conceptos de espacio muestral y evento, sin omitir la consideración de que la probabilidad de un evento en términos de la frecuencia relativa es intuitivamente aceptable pero no proporciona una manera para determinar la probabilidad de un evento.

1.1.4 Propiedades de la Frecuencia Relativa

Si A es un evento de un espacio muestral S asociado a un experimento que puede repetirse N veces, entonces el evento A puede o no ocurrir en cada repetición. Si f es el número de veces que ocurre el evento A en las N repeticiones, entonces a “f” se le llama <u>Frecuencia Relativa</u>. Por ejemplo, en la siguiente tabla se muestran las frecuencias con que ocurrieron los eventos A (aparece sol) y B (aparece águila) al repetir el experimento de lanzar 300 veces una moneda.

Evento		f	Frecuencia Relativa
A (sol)	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	90	$\frac{90}{100} = 0.3$
B (águila)	𝍸 𝍸	210	$\frac{210}{300} = 0.7$

Con las frecuencias relativas 0.3 y 0.7 del ejemplo anterior, se puede concluir que cerca de 30 por 100 de las veces que la moneda se tira ocurrirá el evento A (sol); es decir, la probabilidad de ocurrencia de A (sol) es de 0.3.

Es común calcular la probabilidad de un evento A mediante la expresión:

$$P = (A) = \frac{f}{N}$$

$$\frac{\text{Número de veces que ocurre el evento A}}{\text{Número de repeticiones del experimento.}}$$

En la vida real no podemos repetir un experimento millones de veces. Es posible sin embargo, convenir en que la probabilidad de un evento tiene que satisfacer ciertas propiedades congruentes con el concepto de frecuencia relativa, las cuales son:

P (A) = el evento no ocurre
P (A) = el evento ocurre seguramente
P (A) = un valor más de uno, indica mayor probabilidad de ocurrencia del
$0 < \frac{a}{b} < 1$ evento A, y un valor más cerca de cero, indica menor probabilidad de ocurrencia del evento (A).

Ejemplos: 1) Un equipo de natación de secundaria, está formado por 5 estudiantes de 3er. grado, 4 de 2do. grado y 3 de 1er. grado. Se elige un estudiante al azar para ser capitán del equipo, ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea:

a) de 2do. grado de secundaria.
b) de 2do. semestre de bachillerato.
c) de cualquier grado de secundaria.

Solución: a) Si A es elemento "seleccionar un estudiante de 2do. grado de secundaria" entonces:

A = $\{$cuatro estudiantes$\}$ por lo que P (A) $= \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) Si B es el evento "seleccionar un estudiante de 2do. semestre de bachillerato", entonces:

B= $\{o\}$ por lo que P (B) $= \frac{0}{12} = \boxed{0}$

c) Si C es el evento "seleccionar un estudiante de cualquier grado de secundaria del equipo de natación", entonces:

C = $\{$doce estudiantes$\}$ por lo que P (C) $= \frac{12}{12} = \boxed{1}$

2) Sea el experimento de lanzar un dado, calcula la probabilidad de que:

a) salga un dos en la cara superior del dado,
b) salga cualquier número del espacio muestral,
c) salga un nueve en la cara superior del dado.

El espacio muestral es, S = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces el

Solución: a) evento A, que salga un dos es; A = $\{2\}$, por lo que: $\boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$

b) el evento B, que salga cualquier número es;

B = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por lo que: $P = (B) = \frac{6}{6} = 1$

c) el evento C, que salga un nueve es; C = $\{0\}$, por lo que: $P(C) = \frac{0}{6} = 0$

Las propiedades anteriores de la Frecuencia Relativa son muy importantes, por lo que es necesario que las aprendas.

1.2 NOCIONES DE PROBABILIDAD

1.2.1 Concepto de Probabilidad

Podemos definir el concepto de probabilidad clásica, concepto que sostuvieron Pascal, Fermat y sus sucesores hasta el presente siglo, como:

> Probabilidad Clásica:
>
> "Si en un experimento pueden producirse N resultados igualmente probables y mutuamente excluyentes y si dentro de estos N resultados del evento E puede ocurrir N_E veces, la probabilidad del evento E, que se escribe dado por:
>
> $$P(E) = \frac{Ne}{N}$$

Esta definición es útil para resolver problemas de juegos de azar para los cuales se creó originalmente la teoría de la probabilidad.

Supongamos que lanzamos una dado, la probabilidad de obtener un 2 en el espacio muestral **(**S= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces el evento A = $\{2\}$, por lo que $P(A) = \frac{1}{6}$ **)** es de $\frac{1}{6}$.

Supongamos que lanzamos una moneda, la probabilidad de obtener sol, **(**M=$\{$ águila, sol $\}$, entonces el evento B = $\{$sol$\}$, por lo que $P(B) = \frac{1}{2}$ **)** es de $\frac{1}{2}$.

Por último, tomemos un juego de cartas bien barajeado en el que el experimento de "sacar una carta" hay 52 resultados posibles (un mazo de cartas se compone de 52 cartas con cuatro figuras diferentes). La probabilidad del evento "sacar un as" es $\frac{4}{52}$ (G = $\{$52 cartas$\}$, entonces el evento C (cuatro ases), por lo que $P(C) = \frac{4}{52}$).

A continuación te mostraremos algunos ejemplos del cálculo de probabilidades;

Ejemplos: 3) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sol al lanzar una moneda?

Espacio muestral S = {águila, sol}, entonces la probabilidad es:

$$P(E) = \frac{NE}{N} = \frac{\text{eventos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{2}$$

¿Sabes porqué al calcular la probabilidad de obtener un águila también es $\frac{1}{2}$?

En este ejemplo como en el que sigue hemos utilizado la definición de Probabilidad Clásica:

Probabilidad de un evento =

Número de resultados donde ocurre el evento Número total de posibles resultados

Debemos aclarar que al utilizar la probabilidad clásica, cada uno de los resultados posibles debe tener la misma probabilidad.

4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 al lanzar un dado?

Espacio muestral D = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } para obtener la probabilidad de que salga un 3, se dividen los eventos favorables entre el número de casos posibles, entonces:

$$P(E) = \frac{NE}{N} = \frac{1}{6}$$

En este ejemplo, nos hemos apoyado en el siguiente procedimiento:

$$P(3) = \frac{1}{1+1+1+1+1+1}$$

Número de resultados de un lanzamiento del dado que producirá un 3

Número de resultados posibles de un lanzamiento del dado (que producirá un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 o un 6).

$$P(3) = \frac{1}{6}$$

5) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un as de una baraja de 52 cartas?

Un mazo de cartas consta de 52 cartas (espacio muestral), formado con cuatro figuras diferentes (corazón, trébol, espada y diamante) con trece cartas cada una, esto quiere decir, que para cada figura habrá un as, por lo que la probabilidad de obtener un as será:

$$P(E) = \frac{NE}{N} = \frac{\text{número de ases del mazo de cartas}}{\text{número de cartas del mazo}} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{13}}$$

6) Una urna tiene 3 bolas rojas, 5 blancas y 4 azules.
¿ Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola esta sea:
a) roja
b) blanca
c) azul.

Utilicemos el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores, para calcular las probabilidades.

a) Sea R el evento "tres bolas rojas", ($R = \{R_1, R_2, R_3\}$),

$$\text{entonces: } P(R) = \frac{\text{número de bolas rojas}}{\text{número de bolas en la urna}} = \frac{3}{12} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) Sea B el evento "cinco bolas blancas", $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B5\}$,

$$\text{entonces: } P(B) = \frac{\text{número de bolas blancas}}{\text{número de bolas en la urna}} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

c) Sea A el evento "cuatro bolas azules" , $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$,

$$\text{entonces: } P(A) = \frac{\text{número de bolas azules}}{\text{número de bolas en la urna}} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Con base en las probabilidades anteriores, podemos establecer las expresiones algebraicas para calcular las probabilidades de un evento o suceso, la cual es:

$$\boxed{P(E) = \frac{NE}{N} = \frac{NE}{n}}$$

Expresión algebraica de la probabilidad.

$$\text{donde} \quad \frac{NE}{N} = \frac{\begin{array}{c}\text{número de ocurrencia}\\ \text{de eventos favorables}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{número de casos}\\ \text{posibles}\end{array}} \quad (\text{Probabilidad clásica})$$

$$\frac{NE}{n} = \frac{\text{número de éxitos}}{\begin{array}{c}\text{número de resultados}\\ \text{posibles}\end{array}} \quad \begin{pmatrix}\text{Probabilidad según la}\\ \text{frecuencia Relativa}\end{pmatrix}$$

El cálculo de probabilidades se basa en los siguientes axiomas. Si E indica cualquier evento para el cual se desea calcular la probabilidad, entonces:

a) $P(E) > 0$ La probabilidad de cualquier evento debe ser un valor positivo o cero. Si la probabilidad es cero, el evento no ocurre.

b) $P(\Omega) = 1$ $\left[\sum\limits_{\substack{\text{Todos los}\\ \text{resultados}}} P(A) = 1\right]$ La probabilidad es igual a uno, si el evento ocurre siempre.

c) $P(E) \leq 1$ La probabilidad de un evento nunca puede ser mayor que uno.

Realicemos algunos ejemplos para reafirmar el cálculo de probabilidades;

Ejemplos: 7) Un ejemplo de fútbol de primaria está integrado por 4 alumnos de sexto año, 4 de quinto año, y 3 de cuarto año. Si se elige a un estudiante al azar para ser capitán, ¿cuál es la probabilidad de que sea:

a) de segundo año?: A = { } = Ø, entonces P (A) = P (Ø) = 0

b) de cuarto año?: B = { tres alumnos }, entonces P (B) = $\frac{3}{11}$

en el inciso (a), te das cuenta que no hay alumnos de segundo año en el equipo de fútbol, es decir, el conjunto de segundo año es vacío [Ø], porque no hay elementos. Para (b), el conjunto tiene tres elementos, de los once elementos que forman el equipo.

8) En una carrera de 10 caballos, tomaron parte 3 del Sr. Ruiz. Si los diez ejemplares tienen la misma probabilidad de ganar, ¿cuál es la probabilidad de que el premio lo gane algún caballo del Sr. Ruiz?

A es el evento; “gane un caballo del Sr. Ruiz, entonces;

$$P(A) = \frac{\text{número de caballos que pertenecen al Sr. Ruiz}}{N = \text{número de caballos que participan}}$$

Por lo que: $P(A) = \boxed{\frac{3}{10}}$

¿Podrás calcular cuál es la probabilidad de que el premio lo gane un caballo que no pertenezca al Sr. Ruiz?, ¡Inténtalo!, si no lo logras, fíjate en el siguiente procedimiento.

La suma de las probabilidades de éxito y fracaso, siempre dará como resultado la unidad.

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

Donde P (A) es la probabilidad de éxito, o sea, que gane un caballo del Sr. Ruiz, y P (A´) (complemento de A) es la probabilidad de fracaso, o sea, que no gane un caballo del Sr. Ruiz, entonces:

Si $P(A) = \frac{3}{10}$ y $P(\Omega) = 1$, por lo que si despejamos $P(A')$

tendremos: $P(\Omega) = P(A) + P(A')$

sustituyendo $1 = \frac{3}{10} + P(A')$

entonces $P(A') = 1 - \frac{3}{10} = \boxed{\frac{7}{10}}$

Si conocemos los valores de P (A) y P (A´), tenemos que: $P(\Omega) = P(A) + P(A')$

sustituyendo $P(\Omega) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10}$

por lo que $\boxed{P(\Omega) = \frac{10}{10} = 1}$

Acabas de ver que existe una probabilidad de éxito y otra de fracaso y la suma de éstas siempre es igual a la unidad $[P(\Omega = 1)]$.

Hagamos otro ejemplo:

9) Consideremos el experimento de extraer una esfera de una urna que contiene tres esferas negras, dos verdes y cuatro rojas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una esfera:

a) negra?
b) verde?
c) roja?
d) negra o verde?
e) roja o verde?

a) La probabilidad de extraer una esfera negra de entre nueve esferas que hay en una urna, es:

$$P\,(N) = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b) La probabilidad de extraer una esfera verde de entre nueve esferas que hay en una urna, es:

$$P\,(V) = \boxed{\frac{2}{9}}$$

c) La probabilidad de extraer una esfera roja de entre nueve esferas que hay en una urna, es:

$$P\,(R) = \boxed{\frac{4}{9}}$$

d) La probabilidad de extraer una esfera negra o verde de entre nueve esferas que hay en una urna, nos lleva a otro concepto. “Como la ocurrencia de un evento (extraer una esfera negra) impide la ocurrencia del otro evento (extraer una esfera verde), es decir, no pueden ocurrir al mismo tiempo, porqué sólo hay una extracción, entonces la probabilidad de que ocurra ´esfera negra´ o ´esfera verde´ será:

Probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los eventos.	P (NUV) = P(N) + P(V)

por lo que $P\,(NUV) = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$ que es la probabilidad de que salga una esfera negra o una verde.

e) Análogamente con el inciso anterior, la probabilidad de extraer una esfera roja o verde de entre nueve esferas que hay en la urna, es de:

$$P(R \cup V) = P(R) + P(V),$$

sustituyendo $$P(R \cup V) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{6}{9}}$$

que es la probabilidad de que salga una esfera roja o una esfera verde.

10) Por descuido se revolvieron 15 focos defectuosos con 25 no defectuosos. Si se selecciona al azar uno, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) sirva?
b) no funcione?

a) si el evento A es "focos no defectuosos", entonces:

si A = $\{$25 focos no defectuosos$\}$, por lo que P (A) $= \frac{25}{40} = \boxed{\frac{5}{8}}$

b) si el evento A´es "focos defectuosos", entonces:

si A = $\{$15 focos defectuosos$\}$, por lo que P (A´) $= \frac{15}{40} = \boxed{\frac{3}{8}}$

Observemos que los eventos A y A´ (complemento de A) son eventos complementarios, porque la ocurrencia de uno impide la ocurrencia del otro $[P(A') = 1 - P(A)]$ y el evento de unión de estos eventos, es un evento seguro

$$\boxed{P(A) + P(A') = P(A \cup A') = 1}$$

entonces: P (Ω) = P (A) + P (A´)

sustituyendo P (Ω) $= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}$

por lo que $$\boxed{P(\Omega) = \frac{8}{8} = 1}$$

Con los ejemplos anteriores, te has percatado de lo sencillo que es aplicar la expresión algebraica de la probabilidad

$$\boxed{P(E) = \frac{NE}{N} = \frac{ne}{n}}$$

Con esto, resulta fácil abordar los siguientes temas que son:

1.2.2 Probabilidad de Eventos Excluyentes y No Mutuamente Excluyentes

a) Eventos Mutuamente Excluyentes

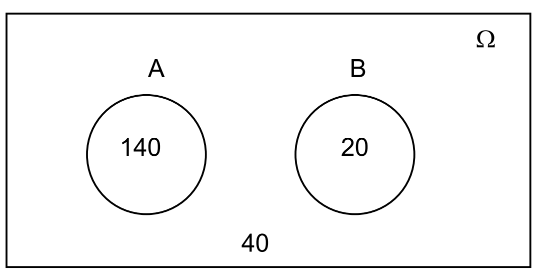
Hagamos un ejemplo para llegar a comprender los eventos mutuamente excluyentes:

11) En un grupo de 200 estudiantes, 140 (80 mujeres y 60 hombres) son estudiantes de tiempo completo y 60 (40 mujeres y 20 hombres) son de medio tiempo:

	Tiempo completo	Tiempo parcial	Total
MUJERES	80	40	120
HOMBRES	60	20	80
TOTAL	140	60	200

Considera A como el evento "el estudiante es de tiempo completo" y B como el evento "el estudiante es de tiempo parcial y además hombre". Observamos que ningún estudiante es de "tiempo completo" y de tiempo parcial, simultáneamente, entonces los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

La siguiente figura plantea desde el punto de vista de conjuntos, el ejemplo de elegir aleatoriamente de entre 200 estudiantes, un estudiante con base a los eventos A y B.



Las probabilidades de estos eventos con base a la expresión algebraica de la probabilidad son:

$$P\ (A) = \frac{140}{200} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \quad y$$

$$P\ (B) = \frac{20}{200} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

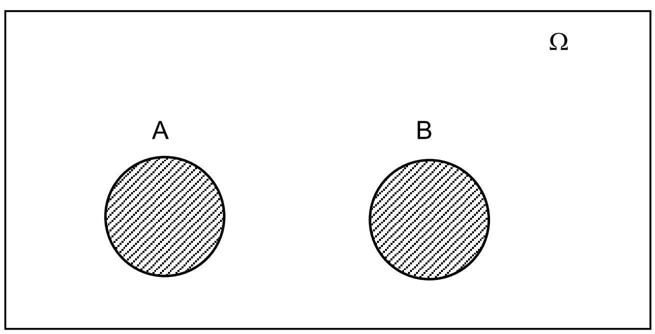
Para obtener la probabilidad del evento A o B [P (A o B) = (A u B), U es unión de dos conjuntos], parece razonable sumar las dos probabilidades anteriores, es decir,

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = 7 + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}}$$

Si observamos el espacio muestral, vemos que existen 160 estudiantes en total de tiempo completo como parcial $\left(\frac{160}{200} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10}\right)$.

por lo tanto:

Si A y B son eventos <u>mutuamente excluyentes</u> o <u>disjuntos</u> (son eventos que no tienen elementos comunes) como se muestra en la siguiente figura; la probabilidad del evento A o B es:



$$\boxed{P\ (A \text{ ó } B) = P\ (A \text{ u } B) = P\ (A) + P(B)}$$

Eventos Mutuamente Excluyentes

De la figura anterior, observas que no hay intersección entre los eventos A y B, por lo que, $P\ (A \cap B) = 0$ (A AB = $\varnothing$). Hagamos otro ejemplo:

12. Se lanza un dado, si A es el evento, “cae un número menor que 3” y B es el eventos, “cae un número mayor que 3”. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o B?

Si A = $\{1, 2\}$ y B = $\{4, 5, 6\}$, vemos que los eventos son mutuamente excluyentes, porque no hay elementos comunes entre estos eventos [$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$], por lo tanto, la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los eventos es:

$$P(A) = \frac{2}{6} \quad y \quad P(B) = \frac{3}{6}\text{; entonces:}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Los ejemplos (11 y 12) anteriores nos permiten concluir que eventos <u>mutuamente excluyentes</u> “no pueden ocurrir al mismo tiempo” es decir, si alguno de ellos sucede, los restantes no pueden suceder.

b) Eventos No Mutuamente Excluyentes

Cuando los eventos no son mutuamente excluyentes, no pueden obtenerse la probabilidad de que ocurra uno u otro sumando simplemente las probabilidades individuales. Utilicemos el ejemplo del grupo de 200 estudiantes, para explicar lo anterior.

Primeramente definamos un tercer evento, C, “el estudiante seleccionado es mujer”; consideremos ahora los eventos A (el estudiante seleccionado estudia tiempo completo) y C. Ya que hay 80 estudiantes que además de estudiar tiempo completo son mujeres, los eventos A y C no son mutuamente excluyentes, es decir, A y C sí tienen elementos en común.

Para encontrar $P(A \cup C)$, debemos de saber cuánto es la probabilidad de A, $P(A) = \frac{140}{200} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

y cuanto es la probabilidad de

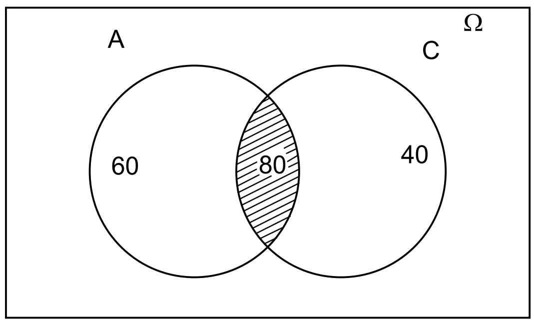
C, $P(C) = \frac{120}{200} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$

si sumamos ambas posibilidades se obtiene:

$$P(A) + P(C) \;=\; \left(\frac{7}{10} + \frac{6}{10}\right) \;=\; \frac{13}{10} \;=\; 1.3$$

la cual es mayor que 1. ¿Recuerdas que la probabilidad <u>nunca debe ser mayor que uno?</u> Lo que ocurre es que al sumar las probabilidades estamos considerando dos veces a los 80 estudiantes de tiempo completo y mujeres, por lo que debemos de restar esta intersección.

La siguiente figura plantea desde el punto de vista de los conjuntos, el ejemplo de elegir aleatoriamente de entre 200 estudiantes, un estudiante con base a los eventos A y C:



Las probabilidades de estos eventos son:

$$P\ (A) = \frac{140}{200} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$P\ (C) = \frac{120}{200} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} \quad \text{y}$$

$$P\ (A\ U\ C) = \frac{80}{200} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}, \ \text{entonces}$$

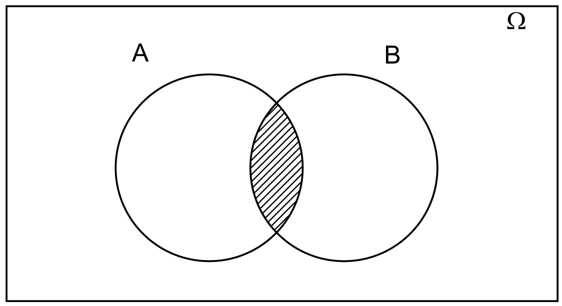
$$P\ (A\ U\ C) = P\ (A) + P\ (C) - P\ (A \cap C) = \frac{7}{10} + \frac{6}{10} - \frac{4}{10} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

Si observamos el espacio muestral, vemos que existen 180 estudiantes que son de tiempo completo o mujer, en consecuencia, la probabilidad de A o C es:

$$P\ (A \text{ o } C) = P\ (A\ U\ C) = \frac{180}{200} = \frac{18}{20} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

Por lo tanto:

Si A y B son eventos no mutuamente excluyentes (eventos que si tienen elementos comunes) como se muestra en la siguiente figura, la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B o ambas es igual a la probabilidad de que ocurra el evento A más la probabilidad de que ocurra el evento B menos la probabilidad de que ambos eventos A y B ocurran.



$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap C)}$$

Eventos no Mutuamente Excluyentes

Realicemos los siguientes ejemplos para aclarar posibles dudas.

13) Halle la probabilidad de que en una tirada de un dado se obtenga el número 4 ó 5.

Solución: Designaremos el número de elementos de un conjunto encerrando el símbolo del conjunto entre paréntesis, y anteponiendo a este un n minúscula. Así, para nuestro ejemplo tendremos que:

A es el evento "cae el número cuatro" y B es el evento "cae el número cinco", por lo que:

n (A) = 1 y n (B) = 1, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Observas que los eventos son excluyentes (disjuntos), porque no hay elementos comunes entre estos eventos.

14) Identifiquemos S como el evento de que asistas a un bachillerato estatal y P el evento de que asistas a un bachillerato privado, considera que no asistirás a ambos simultáneamente, si la probabilidad de que asistas al estatal es $\frac{2}{5}$ y al privado es $\frac{1}{2}$, ¿Cuál es la probabilidad

a) asistas ya sea al estatal o al privado? Y

b) no asistas a ninguno de ellos?

Solución: Si P (S) $= \frac{2}{5}$ y P (P) = $\frac{1}{2}$, entonces:

$$P\ (S \cup P = P\ (S) + P\ (P) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4+5}{10} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

Para resolver el inciso (b), ¿recuerdas que la suma de las probabilidades de éxito y fracaso siempre es la unidad?, es decir, P (Ω) = P (A) + P(A´); entonces:

P (Ω) = P (asista a cualquier bachillerato) + P (no asista a cualquier bachillerato) por lo que:

1 = P (S U P) + P (no asista a cualquier bachillerato),

despejando P (no asista a cualquier bachillerato)

= 1 – P (S U P),

entonces:

$$P\ (\text{no asista a cualquier bachillerato}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{10-9}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

15) En un salón de clases, 50 estudiantes aprueban matemáticas, 25 inglés y 10 aprueban ambas asignaturas. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar, aprueba matemáticas o inglés?

Solución: Si M es el evento “jóvenes que aprueban matemáticas” e I es el evento “estudiantes que aprueban inglés”, entonces:

$$P\ (M) = \frac{50}{85},\ P\ (I) = \frac{25}{85}\ \text{ y }\ P\ (M \cap I) = \boxed{\frac{10}{85};}$$

$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I)$, por lo que tendremos:

$$P(M \cup I) = \frac{50}{85} + \frac{25}{85} - \frac{10}{85} = \frac{65}{85} = \boxed{\frac{13}{17}}$$

16) Se realizó una encuesta entre jóvenes y se halló que 400 juegan fútbol, 175 ajedrez y 125 juegan fútbol o ajedrez. ¿Cuál es la probabilidad de que un joven elegido al azar juegue ambos deportes?

Solución: Si F es el evento "jóvenes que juegan el fútbol" y A es el evento "jóvenes que juegan ajedrez", entonces:

$$P(F) = \frac{400}{700}, \; P(A) \; \frac{175}{700} \; \text{y} \; P(F \cup A) = \frac{125}{700};$$

$P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A)$ pero como el problema nos despide la intersección de los dos eventos, despejemos la de la expresión anterior:

$P(F \cap A) = P(F) + P(A) - P(F \cup A)$, por lo tanto,

$$P(F \cap A) = \frac{400}{700} + \frac{175}{700} - \frac{125}{700} = \frac{450}{700} = \frac{45}{70} = \boxed{\frac{9}{14}}$$

Como te habrás dado cuenta, los ejemplos están sencillos, para que puedas aclarar dudas. Continuemos.

1.2.3 Probabilidad Condicional e Independiente

La probabilidad de un evento puede ser afectada por la ocurrencia de otro. En este caso, los eventos son dependientes (eventos no independientes), por que la ocurrencia de un evento afecta a la ocurrencia del otro evento. Por ejemplo, si de una urna que contiene bolas rojas y tres negras se extrae al azar una bola, y después otra, los eventos A "obtener bola negra en la primera extracción" y B "obtener bola negra en la segunda extracción".

Observamos que los eventos son dependientes (no independientes), porque la bola extraída en la primera extracción no se regresa a la urna antes de la segunda extracción. Entonces, la probabilidad de B depende de la ocurrencia de A. Si A no ocurre, la bola extraída en la primera vez es roja y la probabilidad de B es:

$$\boxed{P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

Ahora, si A ocurre, la bola extraída en la primera vez es negra y la probabilidad de B es:

$$\boxed{P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Casos favorables Total de Resultados	=	dos negras cuatro negras y dos negras

Como observas, la probabilidad de ocurrencia de un evento depende de la ocurrencia del otro evento, entonces:

Si A y B son dos eventos dependientes (no independientes), la probabilidad de que ocurre a tanto A como B es igual al producto de la probabilidad de A multiplicada por la probabilidad de B, con la condición de que A haya ocurrido, denotado por P (B/A) (se lee: probabilidad de que ocurra B dado que haya ocurrido A), entonces:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$$

Por lo que, la probabilidad de un evento cuando ocurre otro se le llama "Probabilidad Condicional", denotada por P (B/A).

La probabilidad condicional de cualquier evento es la probabilidad de que este evento ocurra, con la condición de que otro evento haya ocurrido, por lo que, si despejamos de la expresión anterior la probabilidad condicional P (B/A), tendremos:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad \text{donde } P(A) > 0$$

Realicemos algunos ejemplos:

17) Sea el experimento de extraer dos bolas, una después de otra, de una urna que contiene cuatro bolas rojas y tres negras. Si A es el evento "extraer bola negra es la primera ocasión" y B es el evento "extraer bola negra es la segunda ocasión". ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A y B?

Solución: Como nos piden la probabilidad de ocurrencia de los eventos A y B, tendremos:

P (A) es la probabilidad de obtener bola negra en la primera extracción.

P (B/A) es la probabilidad de obtener bola negra es la segunda extracción, si la bola extraída en la primera ocasión es negra.

P (A $\cap$ B) es la probabilidad de que ocurra al dividir los eventos A y B.

P (A) $= \frac{3}{7}$, resultado que se obtiene al dividir los casos favorables (tres negras) extrae el total de resultados (cuatro rojas y tres negras).

P (B/A) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, por lo tanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B/A) = \frac{3}{7} \bullet \frac{1}{3} = \boxed{\frac{3}{21}}$$

18) Se lanzan tres monedas, ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean soles, y si la primera de las monedas es sol?

Solución:

Espacio muestral Ω = (SSS) (SAS) (SAA) (SSA). S es sol y (AAA) (AAS) (ASA) (ASS), A es águila

¿Sabes como se obtuvo el espacio muestral? ¿No?, Entonces fíjate en el siguiente razonamiento: los posibles resultados de una moneda son águila o sol, si se lanzan tres monedas, tenemos;

$2^3 = 8$

lanzamientos
posible resultado
resultado de lanzar una moneda

Si A es el evento "la primera moneda es sol" [condición] y B es el evento "las tres sean soles", entonces:

A = $\{$(SSS) (SSA) (SAS) (SAA)$\}$ $\therefore$ P (A) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

B = $\{$(SSS)$\}$ $\therefore$ P (B) = $\frac{1}{8}$ y

A $\cap$ B = $\{$(SSS)$\}$ $\therefore$ P (A $\cap$ B) = $\frac{1}{8}$, por lo que tenemos;

Probabilidad de que ocurra el evento B dado que haya ocurrido el evento A.

P (B/A) = $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, sustituyendo:

P (B/A) = $\frac{1/8}{1/2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

19) La probabilidad de que un alumno repruebe Matemáticas es 18 %, de que repruebe Literatura es 16 %, de que reprueben ambas asignaturas es 4 %. Si se elige al azar un alumno y éste reprobó Literatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya reprobado también Matemáticas?

Solución: Si M es el evento "reprobó Matemáticas", L es el evento "reprobó Literatura es el evento "reprobó ambas asignaturas", entonces:

P (M) = 0.18 = $\frac{9}{50}$ (el porcentaje se convirtió en decimal, dividiendo el 18 % entre 100 y omitiendo el signo de porcentaje).

P (L) = 0.16 = $\frac{4}{25}$ y P (M $\cap$ L) = 0.04, sustituyendo:

Probabilidad de que ocurra el evento M dado que haya ocurrido el evento L.

P (M/L) = $\frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{0.04}{0.16}$

Se multiplica por 100 ambas cantidades para expresar el resultado como un cociente de dos enteros.

P (M/L) = $\frac{0.4(100)}{0.15(100)} = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$

20) Consideremos experimento de lanzar dos dados, si A es el evento en el "primer dado aparece un número par" y b es el evento "en el segundo dado aparece el número 2 ó 3", ¿cuál es la posibilidad de que ocurra A y B?

Solución:

$$\text{Espacio Muestral } \Omega = \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & \longleftarrow A \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & \longleftarrow A \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) & \longleftarrow A \\ & \uparrow & \uparrow \\ & B & B \end{array}$$

Para obtener el espacio muestral, se razonó de la siguiente manera:

$6^2 = 36$

lanzamiento de dos dados
posible resultado
resultado de lanzar un dado

A es el evento "en el primer dado aparece un número par", entonces:

A {hay seis 2, hay seis 4 y hay seis 6} = {18} por lo que

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B es el evento "en el segundo dado aparece el número 2 ó 3, entonces:

B = {hay seis 2 y seis 3} = {12} por lo que $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurra A y B, por lo que tenemos:

$A \cap B = \{(2,2)\ (2,3)\ (4,2)\ (4,3)\ (6,2)\ (6,3)\}$ por lo que

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Numéricamente, el ejemplo se resuelve como sigue:

$P(A \cap B) = P(A)\ \ P(B/A)$, entonces $P(A) = \frac{1}{2}$ (hay 18 elementos)

y $P(B/A) = \frac{1}{3}$ (hay 12 elementos), sustituyendo:

$$P(B \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

1.2.4 Eventos Independientes

Dos eventos son independientes, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta a la ocurrencia del otro. Por ejemplo:

21) Consideremos el experimento de lanzar dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera moneda aparezca águila y de que en la segunda moneda aparezca sol?

Solución:

Si A es el evento "aparece águila en la primera moneda" y si B es el evento "aparece sol en la segunda moneda", entonces: $\Omega = \{$ (SS) (SA) (AS) (AA) $\}$,

A = $\{$ (AS) (AA) $\}$ $\therefore$ P (A) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y

B = $\{$ (SS) (AS) $\}$ $\therefore$ P (B) = $\frac{2}{4} - \frac{1}{2}$, como A y B son eventos independientes, porque la ocurrencia de A no afecta a la concurrencia de B y viceversa, entonces:

$$\boxed{P\ (A \cap B) = P(A)\ .\ P\ (B)}$$, sustituyendo

P (A∩B) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Quizá te estés preguntando porque la expresión de eventos independientes (A∩B) = P (A) P (B) aparece sin la probabilidad condicional [P B/A], siendo que iniciamos con la expresión:

P (A∩B) = P (A) · P (B/A)

La razón es muy simple. Recuerda la posibilidad condicional, ocurre un evento, sólo que haya ocurrido otro antes, entonces:

P (B/A) = $\frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} =$ pero si los eventos son independientes, tendremos que

P (AUB) = P(A) P (B), sustituyendo en la expresión de probabilidad condicional:

P (B/A) = $\frac{P\left(A\right) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$; lo mismo ocurre cuando:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A), \text{ entonces:}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B/A) = P(A) \bullet P(B)}$$

1.3 CALCULO DE PROBABILIDADES: PROCEDIMIENTOS ELEMENTALES DE CONTEO.

Los arreglos o permutaciones son útiles para contar el número de todos los diferentes arreglos u ordenamientos que se pueden hacer con un conjunto de objetos. Podemos utilizar el concepto de permutación para determinar el número de formas en que se les pueden asignar a los alumnos los asientos de una clase, el número de formas que se pueden sentar en un escenario un grupo de conferencistas, el número de maneras en que se puede organizar un grupo de libros en un anaquel, etc. Entonces:

> “Una permutación es uno de los diferentes arreglos u ordenamientos que se pueden hacer con todos o con parte de los elementos de un conjunto”.

1.3.1 Arreglos con Repetición y sin Repetición

a) Permutaciones o Arreglos con Repetición

Con frecuencia deseamos saber el número de arreglos de objetos, de los cuales son iguales. Por ejemplo:

22) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar, con los números {6,9}?

Solución: Para formar cantidades de cuatro cifras con los números 6, 9 tenemos que tomarlos en forma repetida, de la siguiente forma; Para el primer número de la cantidad de cuatro cifras, habrá dos números, (2), para el segundo número de la cifra, habrá dos números (2), para el tercer número de la cifra, habrá dos números (2) y para el cuarto número de la cifra, habrá dos números (2), entonces:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = \boxed{16}$$

Con este resultado ($2^4 = 16$), observamos que el número de elementos (n) es dos, que se van a formar cantidades de cuatro en cuatro (r) y para ese ejemplo, se pueden formar 16 números de cuatro cifras cada uno. Investiga cuáles son estos 16 números.

Con base al ejemplo anterior, para referirnos a (números de permutaciones o arreglos con repeticiones de <u>n</u> objetos tomados de <u>r</u> en <u>r</u>) para el ejemplo, de 4 en 4, utilizaremos el símbolo:

<u>Permutaciones o Arreglos con repetición</u>	$\boxed{n^r}$	donde <u>n</u> es número de elementos y <u>r</u> la forma de tomarlos.

Hagamos otro ejemplo:

23) ¿Cuántas placas de auto existen que consta de dos letras y tres cifras en ese orden, si la primera letra es A y la segunda letra puede ser de la A a la F?

L L D D D

1ra. letra = A $\rightarrow$ 1
2da. letra = A, B, C, D, E o F $\rightarrow$ 6
1er. dígito = 0 al 9 $\rightarrow$ 10
2do. dígito = 0 al 9 $\rightarrow$ 10
3er. dígito = 0 al 9 $\rightarrow$ 10

$$1 \cdot 6 \cdot 10^3 = 60000$$

Entonces los arreglos de las letras pueden ser AA, AB, AC, AD, AE o AF, los cuales son seis. El número de dígitos que se puede utilizar en la placa será

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$, entonces: $6 \cdot 10^3 = 600$ placas.

Es posible que a veces queramos calcular el número de permutaciones o arreglos que tengan <u>n</u> objetos de los cuales <u>i</u> son iguales, <u>j</u> son iguales y <u>k</u> son iguales. Por ejemplo:

24) En un salón de clases de kinder hay ocho figuras de plástico: tres cuadradas, tres triángulos y dos rectángulos, las figuras no se pueden distinguir de otro modo. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar, si se quiere hacer una fila sobre la mesa con estas figuras?

Solución: En este ejemplo se muestra objetos de los cuales algunos son iguales entre sí, es decir, hay tres cuadrados (i), tres triángulos (j) y dos rectángulos (k) y en total tenemos ocho (n) figuras. Para calcular el número de permutaciones o arreglos de ocho objetos, de los cuales son de un tipo (i), de un tipo (j) y de un tipo (k), se utiliza la siguiente expresión:

$$\boxed{{}_{n}P_{i,\,j,\,k} = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}}$$

Permutaciones o arreglos de ordenamientos distintos con repetición.

El símbolo (!) en matemáticas se llama factorial e indica un producto decreciente, por ejemplo:

8! = 8·7·6·5·4·3·2·1· = 40320

6! = 6·5·4·3·2·1· = 720

3! = 3·2·1· = 6

entonces para el ejemplo tenemos:

n = 8
i = 3
j = 3
k = 2

$${}_{8}P_{3,3,2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \boxed{560 \text{ maneras}}$$

Hagamos otro ejemplo:

25) ¿Cuántos arreglos se pueden formar con A, A, A, B, B, B, B, C Y C?

Solución: En este caso n = 9, i = 3, j = 4 y k = 2, por lo que, si aplicamos:

${}_{n}P_{i,\,j,\,k} = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}$, y sustituyendo valores, el resultado será:

$${}_{9}P_{3,4,2} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = \boxed{1260}$$

Si utilizas calculadora para llegar a este resultado, la secuencia de las teclas que debes oprimir es:

$\boxed{X!}$ $\boxed{--}$ $[\,3\ \boxed{X!}\ \boxed{X}\ 4\ \boxed{X!}\ \boxed{X}\ 2\ \boxed{X!}\,]$ $\boxed{=}$ 1260

b) Permutaciones o Arreglos sin Repetición

Los arreglos de diferentes objetos, formados todos a la vez, se puede calcular utilizando un producto decreciente (factorial). Por ejemplo:

26) Se proyecta presentar cinco conferencias de una reunión de padres de familia y profesores del colegio. El moderador del programa desea saber cuantas maneras diferentes se pueden situar en el escenario los cinco conferencistas en fila.

Solución: Cada una de estas maneras diferentes son las posibles permutaciones o arreglos, por lo que el moderador, en realidad, lo que quiere saber es el número de permutaciones de cinco objetos tomados todos a la vez. Visualicemos las cinco sillas (S) en el escenario.

S S S S S

Para ocupar la primera silla existen cinco conferencistas,
Para ocupar la segunda silla existen cuatro conferencistas,
Para ocupar la tercera silla existen tres conferencistas,
Para ocupar la cuarta silla existen dos conferencistas y
Para ocupar la quinta silla existe o queda sólo un conferencista, entonces, habrá $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ formas en que puedan distribuir los cinco conferencistas en el escenario, y son 120 maneras.

El número 120 que acabamos de calcular se llama número de permutaciones de cinco objetos tomados a la ves, y podemos establecer una regla general (para hallar el número de permutaciones de n objetos tomados n a la vez, como sigue:

"El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados los n objetos a la vez es igual a n!".

$$\boxed{{}_nP_n = n(n-1)\ (n-2)\ .\ .\ .\ 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Donde n es el número de objetos, tomados a la vez para cada permutación o arreglo, ${}_nP_n$ es el número total de permutaciones o arreglos de n objetos, tomados los n objetos (todos) a la vez.

El símbolo n! (se lee “n factorial”) denota el producto de los n primeros enteros positivos, como se ha visto.

Hagamos otro ejemplo:

27) Se desean colocar seis cuadros en línea recta sobre la pared de la biblioteca. ¿De cuántas maneras diferentes lo pueden hacer?

Solución: Debemos encontrar el número de permutaciones o arreglos que podemos tomar con seis cuadros, entonces, en forma análoga en el razonamiento del ejemplo anterior, tenemos que:

Si ${}_nP_n = n!$, y si $n = 6$, entonces:

$${}_nP_n = 6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \boxed{720}$$

Te sugiero para el siguiente ejemplo, pongas mucha atención.

28) Un vendedor de autos tiene siete modelos para exhibir en un aparador, pero éste sólo tiene espacios para cinco autos. ¿Cuántas muestras puede exhibir?

Solución: El aparador sólo tiene lugar para cinco autos de los siete que existen, es decir únicamente puede utilizar muestras de cinco en cinco. Entonces debe de buscar el número de permutaciones de siete objetos, tomados de cinco en cinco. Recuerda que el primer espacio se ocupar de siete distintas maneras, el segundo espacio de seis maneras distintas y así sucesivamente, hasta el quinto espacio que se puede ocupar de tres maneras distintas, entonces; las muestras posibles son:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{2520}$$

Se puede expresar el cálculo anterior de la siguiente manera:

$$7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\ 2\cdot1}{2\cdot1} = \frac{7\ !7}{2!} = \frac{7!}{(7-5)!}$$

Con base a la expresión anterior, podemos generalizar la situación haciendo que n sea el número de objetos disponibles y r el número de espacios para ocupar, por lo que el número de maneras que se pueda ocupar r espacios cuando se disponen de n objetos está dado por:

$$\boxed{{}_nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

donde $n\,P\,r$ es el número de permutaciones o arreglos de n objetos diferentes tomados de r en r, y r es el número de objetos, tomados a la vez para cada permutación o arreglo.

Realicemos otros ejemplos:

29) ¿Cuál es el total de arreglos del conjunto {a, b, c, d, d}, tomados tres a la vez y dos a la vez?

Solución: Como las muestras son de tres en tres y de dos en dos, debemos calcular el número en permutaciones de n objetos tomados de r en r, entonces:

n = 4 y r = 3 $\quad {}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \boxed{24}$

n = 4 y r = 2 $\quad {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \boxed{12}$

por lo que debemos tener 36 arreglos en total.

30) Un conferencista dispone de ocho temas sobre los que puede disertar durante 30 minutos. Se le pide que presente una serie de cinco conferencias de 30 minutos a un grupo de personas ¿Entre cuántas secuencias de conferencias puede elegir?

Solución: Si aplicamos la fórmula de las permutaciones o arreglos de n objetos diferentes formados de r tenemos:

n = 8 $\quad \therefore \quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-5)!} = \boxed{6720 \text{ secuencias}}$

r = 5

c) Combinaciones

Una características de las permutaciones es que el orden en que se disponen los objetos es importante. Por ejemplo, si tenemos cuatro libros: uno de historia (H), uno de matemáticas (M), uno de Inglés (I) y uno de ciencias (C) y los colocamos en un lugar donde caben solo dos libros, entonces el número de permutaciones o arreglos en que se pueden ocupar los dos espacios, indica para nosotros que es importante el orden en que quedan los dos libros en los espacios.

Las doce posibles permutaciones son:

HM	MH	CM	IM
HI	MI	CI	IH
HC	MC	CH	IC

$$\therefore \quad {}_4P_2 = \boxed{\frac{4!}{2!} = 12}$$

Ahora considera, si el orden de la disposición no importa, es decir, si HM se considera lo mismo que MH, HI lo mismo que IH y así sucesivamente. Entonces el número de arreglos se reduce a seis:

HM	MI
HI	MC
HC	IC

A lo anterior lo llamamos el número de combinaciones de cuatro objetos, tomados de dos en dos. Podemos entonces definir una combinación como sigue:

> "Una combinación es un arreglo de cierto número de objetos formados de un conjunto de n objetos de tal forma que el orden en que se dispone no importa".

Para obtener de nuevo las doce permutaciones originales, necesitamos solamente construir las permutaciones correspondientes originales, necesitamos solamente construir las permutaciones correspondientes a cada una de las seis combinaciones. En este caso, para cada combinación hay dos permutaciones. Generalmente, si tenemos <u>n</u> objetos y los debemos tomar de r en r, podemos construir r! permutaciones sobre cada una de las posibles combinaciones.

Simbolicemos el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r mediante $\binom{n}{r}$ o $_nC_r$. Por consiguiente podemos expresar el número de permutaciones posibles por $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ r!. Es cierto, ya que se demostró en el ejemplo de los libros, que este producto es igual al número total de permutaciones de n objetos formados de r en r, por lo que podemos escribir:

$$_nP_r = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} r!$$

Si resolvemos esta ecuación para $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ podemos obtener una fórmula para calcular el número de combinaciones de n objetos de r en r, entonces:

$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{nPr}{r!}$ Es el número de combinaciones de n objetos formados de r en r.

Recordamos en $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, entonces podemos escribir la expresión anterior en la forma que más se conoce:

$$\boxed{_nC_r = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

donde n es el número total de objetos de un conjunto, r es el número de objetos, tomados a la vez para cada combinación y $_nC_r$ o $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ es el número total de combinaciones de n objetos tomados de r en r.

Realicemos algunos ejemplos para aplicar la fórmula de combinaciones:

31) ¿Cuántas juntas directivas de 5 personas se pueden formar con doce miembros de una organización?

Solución: Como no importa el orden de la elección de las personas tenemos:

n = 12
n = 5 $\quad \therefore \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$, sustituyendo

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5!(7)!} = \boxed{792}$$

32) Un estudiante tiene que contestar de 10 a 12 preguntas de un examen de Estadística:

a) ¿De cuántas maneras puede elegir estas preguntas?
b) ¿Cuántas maneras hay, si tiene que contestar 7 de las 9 primeras preguntas?
c) ¿Cuántas maneras hay, si las 4 primeras son obligatorias?

Solución:

a) Sin n = 12 y r, sustituimos en la expresión de combinaciones:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\binom{12}{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12.11.10!}{10!(2)!} = \boxed{66}$$

b) Si n = 5 y r = 5, (si contesta 7 de 12, quedan 5) y r = 3 (si contesta de 3 en 3, es decir, 9 de 12), entonces:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!(2)!} = \boxed{10}$$

c) Si n = 8 (si cuatro son obligatorias, quedan 12 – 4 = 8) y r = 6 (si debe de contestar 10 y 4 son obligatorias, entonces 10-4 = 6), entonces:

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8.7.6!}{6!(2)!} = \boxed{28}$$

33) Calcula las siguientes combinaciones: ${}_3C_2$ y ${}_{100}C_{98}$

Solución: Para realizar estos cálculos, se sugiere utilices la siguiente igualdad, la cual siempre se cumple.

$$\boxed{{}_nC_r = {}_NC_{n-r}} \quad = {}_3C_2 = {}_3C_{3-2} = {}_3C_1 = \frac{3}{1} = 3$$

$$= {}_{100}C_{100-98} = {}_{100}C_2 = \frac{100.99}{2.1} = 4950$$

RECAPITULACIÓN

Te presentamos enseguida una síntesis de los aspectos más relevantes de este fascículo.

- **Elementos de probabilidad**
  - **Frecuencia relativa**
    - Experimento: Es el proceso mediante el cual se obtiene una observación de un fenómeno.
    - Espacio muestral: Es el conjunto de posibles resultados de un experimento.
    - Evento: Es un subconjunto del espacio muestral.
    - Propiedad de la frecuencia relativa: $P(0) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(A) = \frac{a}{b}$ con $0 < \frac{a}{b} < 1$
  - **Nociones de probabilidad**
    - Concepto de Probabilidad: $P(A) = \frac{Ne}{N}$
    - Expresión algebraica de la probabilidad: $P(E) = \frac{ne}{n}$
    - Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
    - Probabilidad de eventos no mutuamente excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
    - Probabilidad condicional: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
    - Eventos independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
  - **Cálculo de probabilidades**
    - Arreglos con repetición: n^r ; ${}_nP_{i,j,k} = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}$
    - Arreglos sin repetición: ${}_nP_n = n!$; ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
    - Combinaciones: ${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Los siguientes problemas son actividades de carácter práctico y constructivo del contenido estúdialos, resuélvelos y si tienes dudas, consulta a tu asesor o profesor.

1. Una empresa llantera tiene 1500 llantas perfectas, 100 llantas en estado regular y 500 defectuosas. Se efectúa una serie de 4000 elecciones de llantas con remplazo. ¿Cuál es la frecuencia relativa con que aparecen las llantas perfectas o las regulares?

2. Se tiene una urna con 20 bolas negras, 35 verdes y 30 blancas. Se efectúa una serie de 200 extracciones con remplazo. ¿Cuál es la frecuencia relativa con la bola verde o blanca?

3. En un grupo de matemáticas formado por 70 estudiantes, 20 obtuvieron nueve de calificación, 18 obtuvieron siete y 8 obtuvieron seis. ¿Cuál es la frecuencia relativa con la que apareció la calificación seis o siete?

4. Consideremos el experimento "se lanza una moneda dos veces, aparecen dos águilas, ¿qué tipo de evento es?

5. Consideremos el experimento "se lanza un dado" aparece cualquier número del uno al seis, ¿qué tipo de evento es?

6. En un comité de 60 miembros, hay 20 ingenieros. Si se elige al azar a un miembro para representar el comité, ¿cuál es la probabilidad de que el elegido sea ingeniero?

7. Por un error en una farmacia se revolvieron 45 goteros defectuosos con 135 goteros sin defecto. Si se selecciona uno al azar, ¿cuál es la posibilidad de que el gotero sea defectuoso?

8. Un experimento aleatorio consiste en extraer una esfera de una urna que contiene 6 esferas blancas, 10 esferas azules y 14 esferas moradas. Calcular la probabilidad de extraer una esfera y ésta sea:

   a) Blanca
   b) Azul
   c) Morada
   d) Blanca o Azul
   e) Morada o Blanca
   f) Azul o Morada

9. En cierto bachillerato 135 estudiantes reprueban matemáticas, 75 reprueban tanto matemáticas como física, ¿cuál es la probabilidad de elegir a uno al azar que haya reprobado matemáticas o física?

10. Se realizó una encuesta entre jóvenes y se encontró que 400 juegan fútbol, 175 ajedrez. ¿Cuál es la probabilidad de que un joven elegido al azar juegue fútbol o ajedrez?

11. Se lanza un par de dados. Si los números que resultan son diferentes, halla la probabilidad de que la suma sea impar.

12. Se lanza un dado, si el número que resulta es par. ¿Cuál es la posibilidad de que sea primo?

13. Dados las siguientes probabilidades: $P(H) = \frac{6}{16}$, $P(L) = \frac{4}{18}$ y $P(H \cap L) = \frac{2}{20}$, halle $P(L/H) = ?$

14. Una papelería tiene dos urnas, en la urna A se tiene 18 bolígrafos de los cuales son siete defectuosos y en la urna b, se tienen 22 bolígrafos de los cuales son 9 defectuosos. Se extrae al azar un bolígrafo de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún bolígrafo sea defectuoso?

15. Un lote de 20 artículos tiene 10 defectuosos. Se eligen al azar dos artículos del lote uno tras otro, ¿cuál es la probabilidad de que éstos no sean defectuosos?

16. ¿Cuántos números de siete dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9?

17. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse ocho libros en un librero?

18. Una tienda ofrece doce estilos diferentes de cacerolas, ¿cuántas maneras diferentes tiene una señora de elegir, si solo quiere adquirir cinco de ellas?

19. Un estudiante tiene que contestar ocho de diez preguntas en un examen; a) de cuantas maneras puede elegir las preguntas? b) ¿Cuántas maneras, si las tres primeras preguntas son obligatorios?

AUTOEVALUACIÓN

Aquí encontramos los lineamientos a las respuestas de las actividades de consolidación que te permitan llegar a tus propias respuestas, así como completar los procedimientos para encontrar los resultados.

1) $fa = \dfrac{na}{n} = \dfrac{\text{Número de veces que sucedió el evento A llantas perfectas o llantas regulares.}}{\text{Número de veces que se realizó el experimento}}$

$$= \frac{2500}{4000} = \frac{5}{8}$$

2) $fa = \dfrac{na}{n} = \dfrac{\text{Número de veces que sucedió el evento A bola verde o blanca}}{\text{Número de veces que se realizó el experimento}}$

$$= \frac{65}{200}$$

3) $fa = \dfrac{na}{n} =$ ______________________________

$$= 0.37143$$

4) El evento es ______________________________

5) El evento es ______________________________

6) $P(E) = \dfrac{Ne}{N} = \dfrac{\text{Eventos favorables}}{\text{Número de casos posibles de ocurrencia}} = \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3}$

7) $P(E)= \frac{Ne}{N} =$

8) a) $P(B)= \frac{6}{30} \boxed{= \frac{1}{5}}$

b) $P(A)= \frac{\quad}{30} =$

c) P(m)= ______________________

b) P(BUA) = P(B) + P(A) =

e) P(MUB) = P(M) + P(B) =

f) P(AUM) =

9) $P(M) = \frac{135}{185}$,$P(F)\ \frac{75}{185}$ y $P(M\cap F)= \ \frac{25}{100}$, por lo que

$$P(MUF) = P(M) + P(F) – P(M\cap F)$$

$$\frac{135}{185} + \frac{75}{185} + \frac{25}{185} = \frac{185}{185} = 1$$

10) Resuélvelo por ti mismo

11) El espacio muestral:

$$\Omega = \begin{array}{cccccc} \underline{(1, 1)} & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ (2, 1) & \underline{(2, 2)} & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & \underline{(3, 3)} & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & \underline{(4, 4)} & (4, 5) & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & \underline{(5, 5)} & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & \underline{(6, 6)} \end{array}$$

Si n(A) = 30 $P(A) = \frac{30}{36}$

Si A es el evento “los número que resultan son diferentes” quiere decir que las parejas de número iguales [(1,1) (2,2)...(6,6)] se descartan, entonces: n(A) =30

Si $n(B) = 18$, $P(B) = \frac{18}{36}$ $\therefore$ Si B es el evento "su suma sea impar", quiere decir que al sumar los números de cada evento [(1,2),=1+2=3;(4,5), = 4+5=9] el resultado debe ser un número impar, entonces: N(B) =18

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{18}{30} \quad \frac{9}{15} - \frac{3}{5}$$

12) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ Y B $\{2, 3, 5\}$, por lo tanto $P(A) = \frac{3}{6}$ y $P(B) = \frac{3}{6}$ y $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$ $\therefore$

$$P(B/A) = \frac{\quad}{\quad} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

13) Inténtalo por ti mismo

14) $P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B)$, si $P(A) = \frac{11}{18}$ y $P(B) = \frac{13}{22} =$

$$P(A\cap B) = \frac{11}{18} \cdot \frac{13}{22} = \boxed{\frac{143}{396}}$$

15) Si D es el evento "defectuoso" y N es el evento "no defectuoso", entonces $P(D) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ y $P(N) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = P(N) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{90}{380} = \boxed{\frac{9}{38}}$

16) 5^7 =78125 maneras.

17) De 40320 maneras.

18) $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{\quad}{\quad} = 7\,92$ maneras

19) a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} =$

c) $\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} = \frac{7!}{5!(\quad)} =$

ACTIVIDAD DE GENERALIZACIÓN

Para que reafirmes lo aprendido y puedas profundizar sobre los Elementos de Probabilidad, te invito leas en que consiste la “Partición del espacio Muestral” [Ω]” para que abordes el contenido del “Teorema de Bayes” y logres enriquecer lo aprendido. Te invito a que también investigues como resolver el siguientes problema:

En un plantel del Colegio de Bachilleres, el 50% de los estudiantes aprueban Química con seis, el 30% aprueban con siete y el 20% aprueban con ocho. Se sabe que el 4 % que aprueban con seis, el 5% que aprueban con siete y el 6% que aprueba con ocho, no estudian pero acreditan la asignatura. Si se elige al azar:

a) ¿Cuál es la posibilidad de que éste no estudie y apruebe la asignatura?
b) ¿Si no estudia, ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura con seis?

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

JONHSON, Robert. Estadística Elemental. México D.F., grupo. Editorial Iberoamérica 1990.
Este texto cubre el 90% del programa, siguiendo el enfoque del mismo. Con relación al tema su tratamiento es muy adecuado.

ARNOLD NAIMAN, R. **ROSENFELD**, **G**. Zirkel. Introducción a la Estadística. México, D. F. Editorial Mc Graw Hill. 1987
Este texto cubre el 100% del programa, manejando el enfoque del mismo. Sobre el tema incluye una variedad de ejemplos prácticos que permiten una visión amplia en este terreno.

PORTILLA CHIMAL, E. Estadística (primer curso). México, D. F. Nueva Editorial interamericana. 1980.
Este libro aborda el tema de manera muy adecuada, incluye ejemplos muy ilustrativos.

PROAÑO, Humberto. Estadística Aplicada a la Mercadotecnia. 4ª. Edición. México, D. F. Editorial Diana. 1983.
Este texto cubre el 80% del curso. El tratamiento de los temas es muy claro, además de que incluye ejemplos de aplicación práctica.

PARA PROFESORES.

WAYNE W., Daniel. Estadística con aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación. México, D. F. Editorial Mc Graw Hill / Interamericana de México. 1988.

N. M. DOWNIE, R. W. Heat. Métodos Estadísticos Aplicados. 3ª. Edición México, D. F. Editorial Harla, 1973.